Décomposition de signaux
Fourier — *Fiche de cours*

<u>Rappels :</u>

Loi d'Ohm :

En régime continu la loi s'écrit : $U = R \times I$

En régime variable la loi s'écrit : $U = Z \times I$ Z est l'impédance (en Ω)

Signal sinusoïdal :

En régime sinusoïdal, le signal peut être représenté par une fonction mathématique dont la formule générique est :

$u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$

ω représente la pulsation en rad/s
φ représente la phase à l'origine.
U est la tension maximale (ou tension crête)

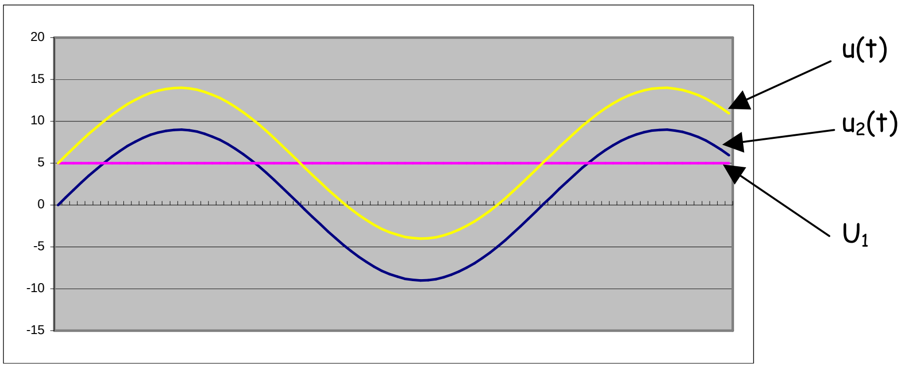
On peut exprimer : $F = 1/T$
$F = \omega / 2\pi$

1/ Addition de signaux

Chaque signal électrique peut être représenté par une fonction mathématique.
Comme il est possible d'ajouter les fonctions entre-elles, il est possible d'ajouter les signaux électriques.
Ainsi :

$U_1 = 5V$
$u_2 = 9 \sin(20\pi t)$

Considérons le signal $u = U_1 + u_2 = 5 + 9 \sin(20\pi t)$.
Il se représente sous la forme :



On obtient un nouveau signal appelé **signal composite**.

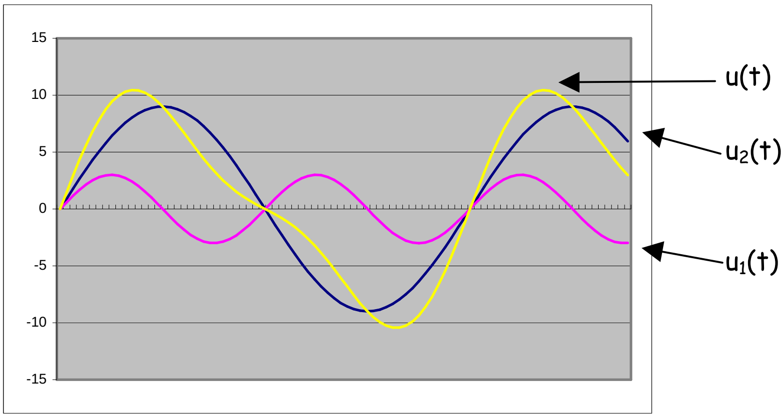
2/ Addition de signaux sinusoïdaux

De la même façon, il est possible d'ajouter les signaux sinusoïdaux. La représentation graphique s'obtient par construction point par point de la courbe. Ainsi :

$u_1 = 3 \sin (40\pi\ t)$

$u_2 = 9 \sin (20\pi\ t)$

$u(t) = u_1 + u_2$



3/ Décomposition de Fourier

En 1822, Joseph Fourier, mathématicien français, a démontré que, pour toute fonction périodique, il est possible de définir une équation sous la forme :

$$u(t) = U + U_1 \sin (2\pi F_1 t + \varphi_1) + U_2 \sin (2\pi F_2 t + \varphi_2) + \ldots\ldots + U_N \sin (2\pi F_N t + \varphi_N) + \ldots\ldots$$

F_1 est appelée **fréquence fondamentale**

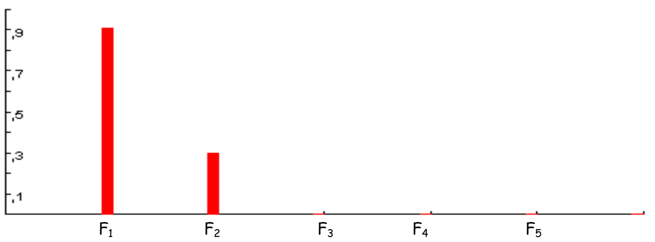
F_2, F_3, …, F_N, … sont appelées **fréquences harmoniques** de rang 2,3, …, N, …

Les fréquences harmoniques sont des **multiples** de la fréquence fondamentale.

Cette écriture est intéressante, car elle nous permet d'analyser un signal périodique quelconque comme une somme de signaux sinusoïdaux.

4/ Analyse spectrale

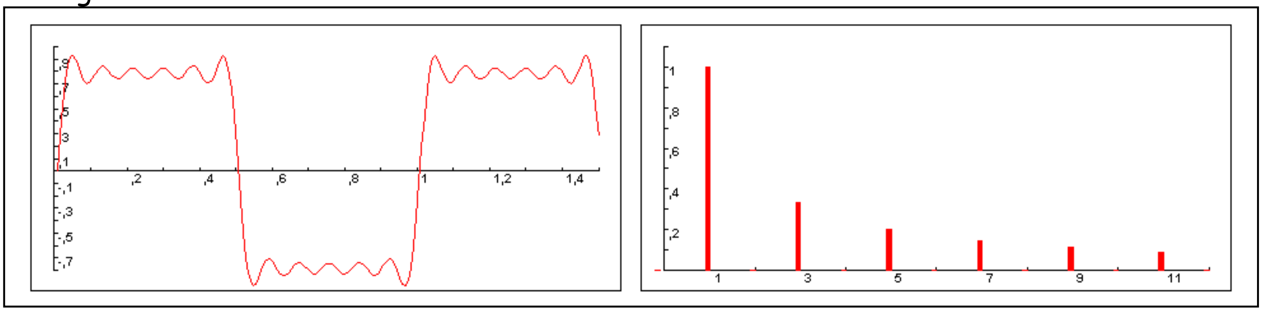
L'un des attrait de cette écriture est la décomposition spectrale des signaux.
En effet, il nous est alors possible de représenter le signal non plus en fonction du temps, mais en fonction de la présence (ou non) des fréquences et de leur amplitude.
Ainsi pour le signal précédent, on obtient le spectre suivant:



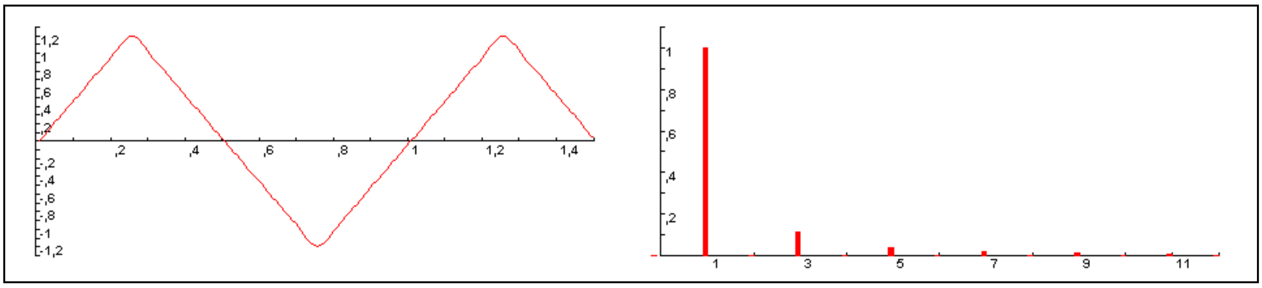
Pour obtenir cette représentation sur un oscilloscope numérique, il suffit de relever le signal, puis de placer l'oscilloscope en **mode FFT** (Fast Fourier Transform). Ce mode affiche alors le spectre de fréquences.

5/ Exemples

Signal carré:



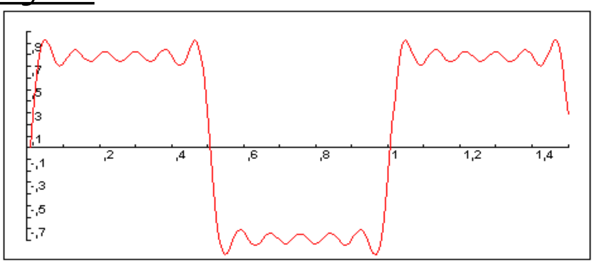
Signal triangulaire :



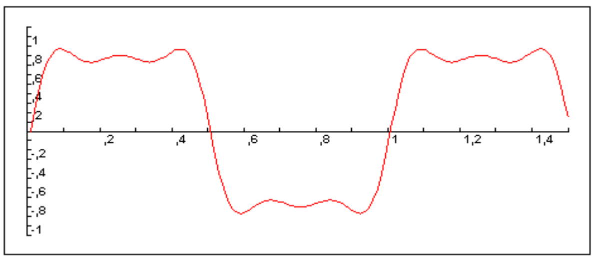
6/ Extraction et filtrage

L'intérêt de la représentation spectrale, est la possibilité de travailler directement sur les fréquences. Ainsi, un filtre agit sur les signaux en fonction de la fréquence.
Par exemple pour un signal carré, nous avons vu sa représentation spectrale ci-dessus. Si on lui applique un filtre passe bas, dont la fréquence de coupure est de 4,5 fois la fréquence fondamentale, on obtient un spectre et un signal ayant la forme suivante :

Signaux

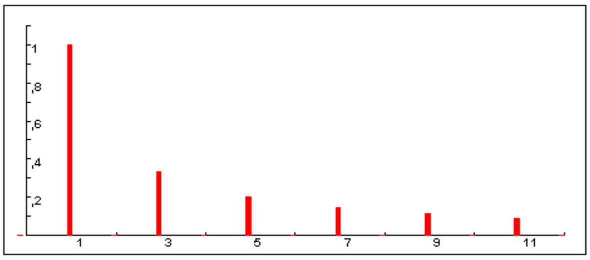


Signal Carré composé de F_1 à F_9

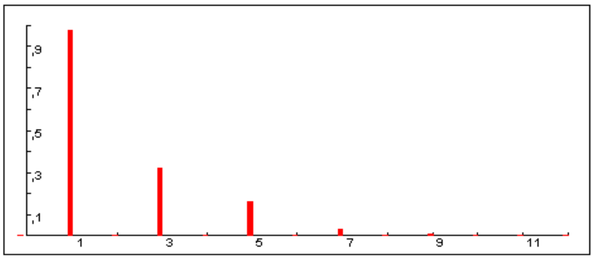


Même signal filtré avec $Fc = 4{,}5 \times F_1$

Spectres :



Spectre du signal Carré composé de F_1 à F_9

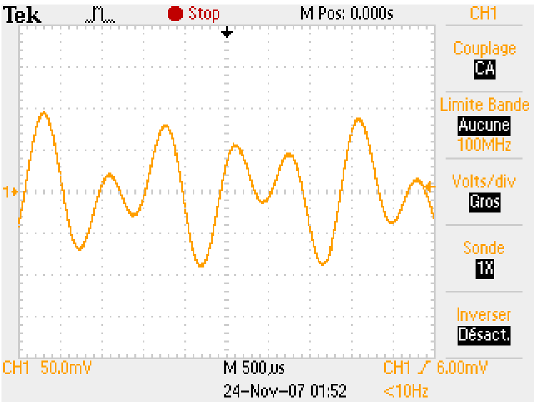


Spectre du même signal filtré avec Fc = 4,5 x F_1

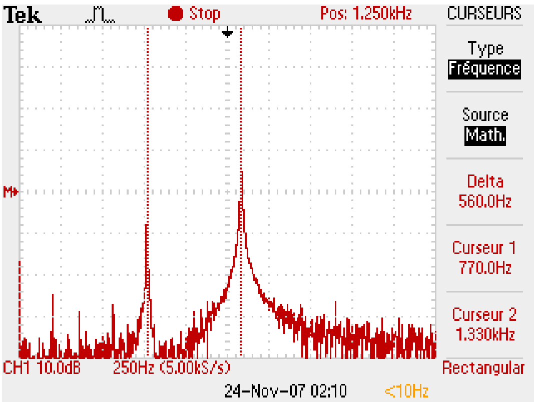
Le même travail pourra être mené avec les filtres passe haut, passe bande, ou réjecteur de bande.

Cette représentation nous permet également d'isoler la présence d'un signal fondamental dans signal périodique. Par exemple en téléphonie, on utilise le codage multifréquences pour la numérotation. Si l'on peut isoler les fréquences dans le signal, on retrouve les deux fréquences émises. En représentation spectrale, on les voit apparaître directement :

Extraction de fréquences:



Signal par appuis sur la touche 5



Spectre du même signal :
Présence des fréquences 770Hz et 1330Hz